σύγχρονο

ΚΕΝΤΡΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ

ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΠΟΥ ΥΠΗΡΕΤΟΥΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ

ΠΕΜΠΤΗ 8 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2020

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

<u>Σχολιασμός Θεμάτων</u>

Τα θέματα ήταν βατά και εξέταζαν ένα μεγάλο μέρος της ύλης.

Το **θέμα Β** και το **θέμα Γ** απαιτούσε την γνώση βασικών μεθοδολογιών καθώς και την επίλυση απλών εξισώσεων.

Στο **θέμα Δ** υπήρχαν ζητήματα λίγο πιο τεχνικά και η μεγαλύτερη δυσκολία αναμένεται στο **ερώτημα Δ3**.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη, σελ.111 σχολικού βιβλίου

Α2. Ορισμός, σελ.140 σχολικού βιβλίου – Λογικά θα δεχτούν και τον ορισμό στην σελ.32 του σχολικού βιβλίου. Συνήθως δίνεται σχετική οδηγία στους διορθωτές.

Α3. Θεώρημα σελ.128 σχολικού βιβλίου, γεωμετρική ερμηνεία σελ.128 σχολικού βιβλίου

Α4.

α) Λ, **β) Λ**, **γ) Λ**, **δ) Λ**, **ε) Σ**

ΘΕΜΑ Β

Έχουμε: $f(x)=\alpha x+1$ και $g(x)=x+2$ για τις οποίες πρέπει $f\circ g=g\circ f$

Β1. Προφανώς $A_{f\circ g}=A_{g\circ f}=R$. Άρα, για κάθε $x\in R$ πρέπει να ισχύει:

$$(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)\Rightarrow f(g(x))=g(f(x))\Rightarrow \alpha(x+2)+1=\alpha x+1+2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha x+2\alpha+1=\alpha x+3\Rightarrow \begin{cases}\alpha=\alpha\\ 2\alpha+1=3\end{cases}\Rightarrow 2\alpha+1=3\Rightarrow 2\alpha=2\Rightarrow \alpha=1$$

Β2. Έχουμε $f(x)=x+1$ παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με $f'(x)=1>0\Rightarrow f$: γνησίως αύξουσα, δηλαδή και 1-1. Άρα, η f είναι αντιστρέψιμη. Για την αντίστροφη:

$$y=f(x)\Rightarrow y=x+1\Rightarrow x=y-1 \text{ για κάθε } y\in R$$

Άρα, $f^{-1}(x)=x-1$ για κάθε $x\in R$.

Β3. Αρκεί να λύσουμε την εξίσωση $f(x)=f^{-1}(x)\Rightarrow x+1=x-1\Rightarrow 0=2$ αδύνατη. Επομένως, οι συναρτήσεις f και f^{-1} δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

Β4. Έχουμε: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{f(x)}-2}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\left(\sqrt{x+1}-2\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{(x-3)(x+3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)}{(x-3)(x+3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{(x+3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\frac{1}{6\cdot 4}=\frac{1}{24}$$

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Έχουμε: $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+1}+\alpha x & ,x\ge 0\\ x^2-\alpha & ,x<0\end{cases}$, συνεχής.

Γ1. Η f είναι συνεχής, επομένως πρέπει:

$$f(0)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^-}f(x)\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\left(\sqrt{x^2+1}+\alpha x\right)=\lim_{x\to 0^-}\left(x^2-\alpha\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1=-\alpha\Rightarrow\alpha=-1.$$

Δηλαδή $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+1}-x & ,x\ge 0\\ x^2+1 & ,x<0\end{cases}$

Γ2. Αρχικά θα εξετάσουμε αν η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο 0. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\Rightarrow\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x^2+1}-x-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2+1-1}{x}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x+1\right)}{x\left(\sqrt{x^2+1}+x+1\right)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2}{x}\Rightarrow\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(x^2+1-x^2-2x-1\right)}{x\left(\sqrt{x^2+1}+x+1\right)}=\lim_{x\to 0^-}x\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\lim_{x\to 0^+}\frac{-2}{\left(\sqrt{x^2+1}+x+1\right)}=\lim_{x\to 0^-}x\Rightarrow -1=0$$ Αδύνατο, επομένως η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=0$. Άρα, το σημείο $x_o=0$ είναι κρίσιμο σημείο καθώς η συνάρτηση είναι συνεχής αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη.

Γ3. Για $x\neq 0$ έχουμε: $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1 & ,x>0\\ 2x & ,x<0\end{cases}$. Επομένως,

- Για $x<0$ έχουμε $f'(x)=2x<0$ άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,0)$.
- Για $x>0$ έχουμε

$$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1=\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+1}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}=$$
$$=\frac{-1}{\sqrt{x^2+1}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}<0$$ άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,+\infty)$.

Γ4. Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$$

Αφού $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) = (+\infty)+(+\infty) = +\infty$

ΘΕΜΑ Δ

Γνωρίζουμε ότι $f : R \to R$ με $f(0)=0$ και $f'(x)=3x^2$

Δ1. Έχουμε: $f'(x)=3x^2 \Rightarrow \left(f(x)\right)' = \left(x^3\right)'$, επομένως από συνέπειες Θεωρήματος Μέσης Τιμής υπάρχει $c\in R$ τέτοιο ώστε $f(x)=x^3+c$ για κάθε $x\in R$. Όμως, έχουμε $f(0)=0 \Leftrightarrow 0+c=0 \Leftrightarrow c=0$. Επομένως, $f(x)=x^3$ για κάθε $x\in R$.

Δ2. Έστω σημείο $\mathrm{A}\left(x_o, f(x_o)\right)$ της C_f, στο οποίο η εφαπτόμενη ευθεία διέρχεται από το σημείο $\mathrm{N}\left(-2, f(-2)\right)$. Τότε:

$$y - f(x_o) = f'(x_o)(x-x_o) \underset{y=f(-2)=-8}{\overset{x=-2}{\Rightarrow}} -8 - f(x_o) = f'(x_o)(-2-x_o) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -8 - {x_o}^3 = 3{x_o}^2(-2-x_o) \Rightarrow -3{x_o}^2(2+x_o) + {x_o}^3 + 8 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3{x_o}^2(2+x_o) + (x_o+2)\left({x_o}^2 - 2x_o + 4\right) = 0 \Rightarrow (x_o+2)\left(-2{x_o}^2 - 2x_o + 4\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_o = -2 \text{ ή } x_o = 1$$

Άρα:

- Για $x_o=-2$ η εξίσωση της εφαπτομένης είναι
  $y - f(-2) = f'(-2)(x+2) \Rightarrow y = 12x+16$
- Για $x_o=1$ η εξίσωση της εφαπτομένης είναι
  $y - f(1) = f'(1)(x-1) \Rightarrow y = 3x-2$

Δ3. Έχουμε: $y(t)=x^3(t)$ για κάθε t και πρέπει $-2\le x(t)\le 0$ επειδή το σημείο Μ ξεκινάει από το σημείο Ν με τετμημένη -2 και τελειώνει την κίνησή του στο σημείο Ο με τετμημένη 0. Τότε, πρέπει να βρούμε πότε ισχύει $y'(t)=3x'(t)$. Άρα, έχουμε:

$$y'(t)=3x'(t)\Rightarrow\left(x^3(t)\right)'=3x'(t)\Rightarrow 3x^2(t)x'(t)=3x'(t)\overset{x'(t)>0\Rightarrow x'(t)\neq 0}{\Rightarrow} x^2(t)=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t)=1 \text{ ή } x(t)=-1$$

Όμως $-2\le x(t)\le 0$, άρα αναγκαστικά πρέπει $x(t)=-1$ και $y(t)=-1$.

Επομένως, το σημείο που ψάχνουμε είναι το $\mathrm{B}(-1,-1)$.