ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΕΠΑΛ

4 ΙΟΥΝΙΟΥ 2022

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη, σχολικό βιβλίο σελίδα 28 – 29

Α2. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελίδα 87

Α3. α. Λ

β. Σ

γ. Λ

Α4. α. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x>0$

β. $f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

ΘΕΜΑ Β

Β1 $\quad 25,\ 10,\ 5,\ 20,\ 15 \qquad \nu = 5$

$$\bar{x} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} t_i = \frac{1}{5}\cdot\sum_{i=1}^{5} t_5 = \frac{25+10+5+20+15}{5} = \frac{75}{5} = 15$$

$$R = t_{max} - t_{min} = 25 - 5 = 20$$

Β2

$$s^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}(t_i - \bar{x})^2 = \frac{(25-15)^2 + (10-15)^2 + (5-15)^2 + (20-15)^2 + \overset{20}{\cancel{(15-15)^2}}}{5} = \frac{100+25+100+25}{5} = \frac{250}{5} = 50$$

Β3

$$CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{5\sqrt{2}}{15} = \frac{\sqrt{2}}{3} > 0{,}1,$$ άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

όπου $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1 $f(x) = x^3 - 9x^2 + ax + 1$, $x, a \in \mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 18x + a$

$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3 - 18 + a = 0 \Leftrightarrow \boxed{a = 15}$

Γ2 Για $a = 15$: $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 1$, $x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 18x + 15$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(2, f(2))$ είναι η : (ε): $y = f'(2) \cdot x + b$ (1)

όπου $f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 18 \cdot 2 + 15 =$
$= 3 \cdot 4 - 36 + 15 \Rightarrow$
$\Leftrightarrow \boxed{f'(2) = -9}$

Άρα,
$(1) \Leftrightarrow y = -9 \cdot x + b$

όμως $M(2, f(2)) = (2,3) \in (\varepsilon) \Leftrightarrow 3 = -9 \cdot 2 + b \Leftrightarrow \boxed{b = 21}$

$f(2) = 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 15 \cdot 2 + 1 =$
$= 8 - 36 + 30 + 1 =$
$= 3$

Άρα, τελικά,
η (ε): $y = -9 \cdot x + 21$

Γ4 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-18x+15}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3(x^2-6x+5)}{x^2-1}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3\cancel{(x-1)}\cdot(x-5)}{\cancel{(x-1)}(x+1)}=\dfrac{3\cdot(1-5)}{1+1}=\dfrac{3\cdot(-4)}{2}=-6$

Γ3 $f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-18x+15=0 \Leftrightarrow 3(x^2-6x+5)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_1=1$ ή $x_2=5$

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	Τ.Μ.	$\searrow$	Τ.Ε.	$\nearrow$	

Η f $\nearrow$ στο $(-\infty, 1]$

$\searrow$ στο $[1, 5]$

$\nearrow$ στο $[5, +\infty)$

Στο $x_0=1$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(1)=8$

Στο $x_0=5$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(5)=-24$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

Θα πρέπει: $x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$

Άρα, $A_f = \mathbb{R} - \{-1\}$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο A_f ως ρητή με:

$$f'(x) = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

Δ2) $f'(2) = \dfrac{1}{(2+1)^2} = \dfrac{1}{9}$

άρα $\bar{x} = \dfrac{1}{f'(2)} = 9$

$f'(1) = \dfrac{1}{4}$

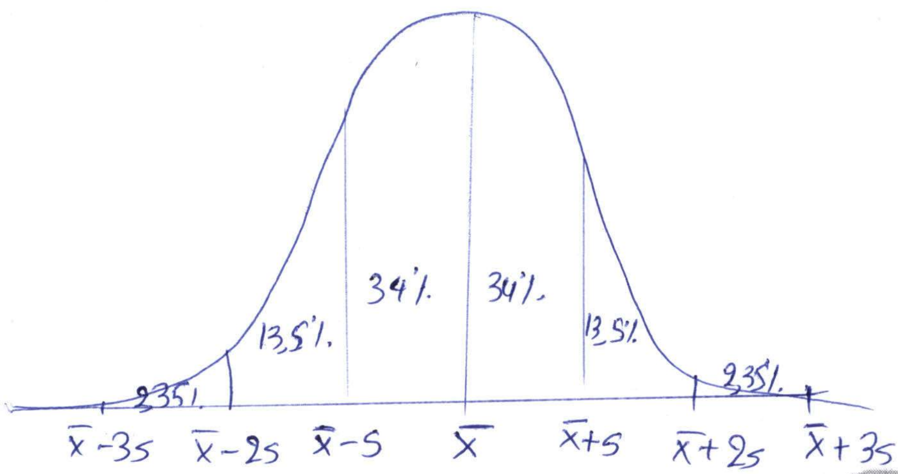
άρα $s = \dfrac{1}{2 \cdot \frac{1}{4}} = 2$

Δ4) $\bar{x}=9$, $s_x=2$

Άρα η νέα μέση τιμή: $\bar{y}=\bar{x}+3=9+3=12$

και η νέα τυπική απόκλιση: $s_y=s_x=2$.

Δ3



$\bar{x}=9$ $\qquad$ $\bar{x}+2s=13$

$\bar{x}-s=7$ $\qquad$ $\bar{x}+3s=15$

$\bar{x}-2s=5$

$\bar{x}-3s=3$

$\bar{x}+s=11$

Σύμφωνα με τις τιμές της κανονικής κατανομής:

~~Από~~ στο $(\bar{x}-s, \bar{x}+s)$ βρίσκεται το 68% των μαθητών.

Από $\bar{x}-2s$ μέχρι $\bar{x}-s$ το 13,5% των μαθητών

Συνολικά από 5 μέχρι 11 λεπτά έχουμε το $68+13{,}5=81{,}5\%$ των μαθητών, δηλαδή $\frac{81{,}5}{100}\cdot 2000 = 1.630$ μαθητές

• Πάνω από 15 $=\bar{x}+3s$ υπάρχει το 0,15% των μαθητών

άρα $\frac{0{,}15}{100}\cdot 2000 = 3$ μαθητές