Εξετάσεις 06 Ιουνίου 2022

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΓΕΛ Γ' Λυκείου

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

σύγχρονο
ΚΕΝΤΡΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΤΣΙΜΙΣΚΗ & ΚΑΡΟΛΟΥ ΝΤΗΛ ΓΩΝΙΑ ΤΗΛ: 270727–222594
ΑΡΤΑΚΗΣ 12 - Κ. ΤΟΥΜΠΑ ΤΗΛ: 919113–949422
www.syghrono.gr

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σχολικού βιβλίου, σελ. 186

Α2. Ορισμός σχολικού βιβλίου, σελ. 142

Α3. Ορισμός σχολικού βιβλίου, σελ. 161

Α4. α) Σ, β) Σ, γ) Σ, δ) Λ, ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για την σύνθεση ισχύει:

- $D_{f\circ g}=\begin{cases} x\in D_g \\ g(x)\in D_f \end{cases}=\begin{cases} x\geq 0 \\ \sqrt{x}\leq 1 \end{cases}=\begin{cases} x\geq 0 \\ x\leq 1 \end{cases}=[0,1]$ και
- $h(x)=(f\circ g)(x)=f(g(x))=\sqrt{x}^4-2\sqrt{x}^2+1=x^2-2x+1=(x-1)^2$ για κάθε $x\in[0,1]$.

Β2. Η συνάρτηση h είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ ως πολυωνυμική, με $h'(x)=2(x-1)\leq 0$ για κάθε $x\in[0,1]$, επομένως η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα άρα και ¨1-1¨, δηλαδή αντιστρέφεται.

Τότε, για $h(x)=y\Leftrightarrow(x-1)^2=y\overset{y\geq 0}{\Leftrightarrow}|x-1|=\sqrt{y}\underset{x-1<0}{\overset{x\in[0,1]}{\Leftrightarrow}}x-1=-\sqrt{y}\Leftrightarrow x=1-\sqrt{y}$, όπου πρέπει $y\in h(A)\underset{h:\searrow}{\overset{h:\sigma\upsilon\nu}{=}}[h(1),h(0)]=[0,1]$

Άρα, ισχύει $h^{-1}(x)=1-\sqrt{x}, x\in[0,1]$.

Β3. Έχουμε $\varphi(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}, & x\in[0,1) \\ \dfrac{1}{2}, & x=1 \end{cases}$.

i. Η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο $[0,1)$ ως ρητή. Επίσης, έχουμε:

$\lim\limits_{x\to 1^-}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1-\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{(1+\sqrt{x})}=\dfrac{1}{2}=\varphi(1)$, άρα η συνάρτηση είναι συνεχής και στο $x_o=1$. Επομένως, η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο $[0,1]$.

Τέλος, $\varphi(0)=1\neq\dfrac{1}{2}=\varphi(1)$. Επομένως, ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών.

ii. Γνωρίζουμε ότι $\dfrac{\pi}{6}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\underset{\sigma\tau o\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]}{\overset{\eta\mu x:\nearrow}{\Rightarrow}}\eta\mu\dfrac{\pi}{6}<\eta\mu\alpha<\eta\mu\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow\dfrac{1}{2}<\eta\mu\alpha<1\Rightarrow\varphi(0)<\eta\mu\alpha<\varphi(1)$

Άρα, από το προηγούμενο ερώτημα και το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_o\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $\varphi(x_o)=\eta\mu\alpha$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Γνωρίζουμε ότι $-2=(-2x)'$ και $3x^2-1=(x^3-x)'$, επομένως από τις συνέπειες του θεωρήματος μέσης τιμής, υπάρχουν $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $f(x)=\begin{cases}-2x+c_1, & x\le -1\\ x^3-x+c_2, & x>-1\end{cases}$.

Όμως, έχουμε: $f(0)=0\Leftrightarrow 0-0+c_2=0\Leftrightarrow c_2=0$ και η συνάρτηση πρέπει να είναι συνεχής στο $x_o=-1$, επομένως:

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^-} f(x)\Leftrightarrow \lim_{x\to -1^+}\left(x^3-x\right)=\lim_{x\to -1^-}\left(-2x+c_1\right)\Leftrightarrow 0=2+c_1\Leftrightarrow c_1=-2$$

Τελικά, $f(x)=\begin{cases}-2x-2, & x\le -1\\ x^3-x, & x>-1\end{cases}$

Γ2. Η εφαπτόμενη ευθεία στο $\mathrm{A}(x_o, f(x_o))$ δίνεται από τη σχέση: $y-f(x_o)=f'(x_o)(x-x_o)$ και πρέπει να διέρχεται από το σημείο του άξονα y'y με τεταγμένη -2, επομένως:

$$y-f(x_o)=f'(x_o)(x-x_o)\Leftrightarrow -2-x_o^{\,3}+x_o=(3x_o^{\,2}-1)(-x_o)\Leftrightarrow 2x_o^{\,3}=2\Leftrightarrow x_o=1$$

Επομένως, το σημείο είναι το $\mathrm{A}(1,0)$ με εφαπτόμενη ευθεία την $(\varepsilon): y=2x-2$.

Γ3. Το τρίγωνο ΜΚΓ είναι ορθογώνιο, με ορθή την γωνία Κ. Επομένως, το εμβαδόν του τριγώνου δίνεται από τη σχέση:

$$\mathrm{E}=\frac{\Gamma\mathrm{K}\cdot \mathrm{MK}}{2}\Leftrightarrow E(x)=\frac{(x-2)(2x-2)}{2}=(x-2)(x-1)=x^2-3x+2$$

Άρα, κάθε χρονική στιγμή t έχουμε: $E(t)=x^2(t)-3x(t)+2$.

Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού δίνεται από τη σχέση: $E'(t)=2x(t)x'(t)-3x'(t)$.

Τέλος, την χρονική στιγμή $t=t_o$ γνωρίζουμε ότι: $x(t_o)=3\mu o\nu$ και $x'(t_o)=2\mu o\nu$, επομένως, ισχύει: $E'(t_o)=2\cdot 3\cdot 2-3\cdot 2=12-6=6\,{}^{\tau\varepsilon\tau.\mu o\nu.}\!/_{\delta\varepsilon\upsilon\tau.}$

Γ4. Αρχικά, για $x\to-\infty$, προφανώς $x<-1$ και $-x>1$, άρα έχουμε:

- $-1\le \eta\mu f(x)\le 1 \overset{-2(x+1)>0}{\Rightarrow} \dfrac{1}{2(x+1)}\le \dfrac{\eta\mu f(x)}{-2(x+1)}\le -\dfrac{1}{2(x+1)}$, με $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{2(x+1)}\right)=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{1}{2(x+1)}\right)=0$, επομένως, από κριτήριο παρεμβολής έχουμε: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}\right)=0$ και
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(-x)}{1-x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3-x}{1-x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{-x^3}=-1$

Άρα, έχουμε: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}+\dfrac{f(-x)}{1-x^3}\right]=0-1=-1$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

i. Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x)=\dfrac{x-1}{x}$. Επομένως, έχουμε:

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$
- $f'(x)>0 \Leftrightarrow x>1 \Rightarrow f:\nearrow$ στο $[1,+\infty)$ και
- $f'(x)<0 \Leftrightarrow 0<x<1 \Rightarrow f:\searrow$ στο $[0,1]$

Άρα, η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x_o=1$ την τιμή $f(1)=1-\ln 3<0$.

Επίσης, έχουμε τα όρια: $L_1=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ και

$L_2=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\ln(3x)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\left(\dfrac{e^x}{3x}\right)\right)=+\infty$ επειδή: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x}{3x}\right)\underset{DLH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x}{3}\right)=+\infty$.

Άρα, έχουμε:

- $\Delta_1=f\left((0,1]\right)\underset{f:\searrow}{\overset{f:\sigma\upsilon\nu}{=}}[1-\ln 3,+\infty)\Rightarrow 0\in\Delta_1$ και f 1-1 στο $(0,1]$, επομένως υπάρχει ακριβώς ένα $x_1\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1)=0$.
- $\Delta_2=f\left([1,+\infty)\right)\underset{f:\nearrow}{\overset{f:\sigma\upsilon\nu}{=}}[1-\ln 3,+\infty)\Rightarrow 0\in\Delta_2$ και f 1-1 στο $[1,+\infty)$, επομένως υπάρχει ακριβώς ένα $x_2\in(1,+\infty)$ τέτοιο, ώστε $f(x_2)=0$.

Τελικά, η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1,x_2 με $x_1<1<x_2$.

ii. Επίσης, έχουμε: $f''(x)=\left(\dfrac{x-1}{x}\right)'=\dfrac{1}{x^2}>0$, άρα $f:\cup$ στο $(0,+\infty)$.

Δ2. Για το εμβαδόν ισχύει: $E=\int_{x_1}^{x_2}\left|f(x)\right|dx$, όπου:

- για $x_1<x<1\overset{f:\searrow}{\Rightarrow} f(x)<f(x_1)=0$, και
- για $1<x<x_2\overset{f:\nearrow}{\Rightarrow} f(x)<f(x_2)=0$

Άρα, έχουμε: $f(x)\le 0$ για κάθε $x\in[x_1,x_2]$.

Επομένως, $E=\int_{x_1}^{x_2}-f(x)\,dx=\int_{x_1}^{x_2}(-x+\ln 3x)\,dx=\ldots=\left[-\dfrac{x^2}{2}+x\ln 3x-x\right]_{x_1}^{x_2}=$

$$=-\frac{x_2^{\;2}}{2}+\frac{x_1^{\;2}}{2}+x_2\ln 3x_2-x_1\ln 3x_1-x_2+x_1$$

Όμως, $f(x_1)=0\Leftrightarrow \ln 3x_1=x_1$ και ομοίως $\ln 3x_2=x_2$, άρα:

$$E=-\frac{x_2^{\;2}}{2}+\frac{x_1^{\;2}}{2}+x_2^{\;2}-x_1^{\;2}-x_2+x_1=\frac{x_2^{\;2}}{2}-\frac{x_1^{\;2}}{2}-x_2+x_1=\frac{1}{2}(x_2-x_1)(x_2+x_1)-\frac{2}{2}(x_2-x_1)=$$

$$=\frac{1}{2}(x_2-x_1)(x_2+x_1-2)$$

Δ3. Ισχύει: $x_1<1\Rightarrow -x_1>-1\Rightarrow 2-x_1>1$. Τότε:

$$f(2-x_1)<0\Leftrightarrow f(2-x_1)<f(x_2)\overset{f:\nearrow}{\Leftrightarrow}2-x_1<x_2\Leftrightarrow x_2+x_1-2>0\overset{\cdot\frac{1}{2}(x_2-x_1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(x_2-x_1)(x_2+x_1-2)>0\Leftrightarrow E>0 \text{ που ισχύει.}$$

Δ4. Αρχικά, γνωρίζουμε ότι η εφαπτόμενη ευθεία στο x_2 δίνεται από τη σχέση: $y-f(x_2)=f'(x_2)(x-x_2)\Leftrightarrow y=f'(x_2)(x-x_2)$ και η συνάρτηση f είναι κυρτή, επομένως θα βρίσκεται πάντα ¨πάνω¨ από την εξίσωση της εφαπτομένης, εκτός από το σημείο επαφής. Δηλαδή, ισχύει $f(x)\geq f'(x_2)(x-x_2)\Leftrightarrow f(x)-f'(x_2)(x-x_2)\geq 0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=x_2$.

Επίσης, γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=1$, επομένως, ισχύει $f(x)\geq f(1)\Leftrightarrow f(x)\geq 1-\ln 3\Leftrightarrow f(x)-1+\ln 3\geq 0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$.

Άρα, αν προσθέσουμε τις προηγούμενες δύο σχέσεις, τότε:

$$\left.\begin{aligned} f(x)-f'(x_2)(x-x_2)\geq 0\\ f(x)-1+\ln 3\geq 0\end{aligned}\right\}\overset{(+)}{\Rightarrow}\left[f(x)-f'(x_2)(x-x_2)\right]+\left[f(x)-1+\ln 3\right]\geq 0$$

Όμως, η ισότητα δεν μπορεί να ισχύει ποτέ, επειδή οι δύο παρενθέσεις δεν μηδενίζουν ταυτόχρονα ποτέ. Επομένως, ισχύει $\left[f(x)-f'(x_2)(x-x_2)\right]+\left[f(x)-1+\ln 3\right]>0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2f(x)+\ln 3-1-f'(x_2)(x-x_2)>0\Leftrightarrow 2f(x)+\ln 3>1+f'(x_2)(x-x_2)$, δηλαδή, η εξίσωση της εκφώνησης είναι αδύνατη.

Επιμέλεια:

Ζαχαράκης Στέφανος

Μαργαριτέλη Ελένη