

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΠΟΥ  
ΥΠΗΡΕΤΟΥΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ  
ΣΑΒΒΑΤΟ 10 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2022  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο  $x_0$ , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

**Μονάδες 7**

**A2.** Πότε η ευθεία  $y = \lambda x + \beta$  λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο  $+\infty$ ;

**Μονάδες 4**

**A3.** Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής (Θ.Μ.Τ.) του Διαφορικού Λογισμού και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ , τότε  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$ .

**β)** Έστω μια συνάρτηση  $f$  συνεχής στο διάστημα  $[\alpha, \beta]$ . Αν  $f(x) \geq 0$ , για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$ , τότε  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq 0$ .

**γ)** Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $x_0$  ένα εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ . Αν η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο  $x_0$  και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε  $f'(x_0) = 0$ .

**δ)** Ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x} = 0$ .

**ε)** Η συνάρτηση  $f(x) = \ln|x|$ ,  $x \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ , είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}^*$  και ισχύει:

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{|x|}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^*.$$

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $f(x) = x^3 - 3x + 1$ .

**B1.** Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση  $f$ .

**Μονάδες 6**

**B2.** Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο της με τετμημένη  $x_0 = 0$ .

**Μονάδες 6**

**B3.** Να υπολογίσετε το  $I = \int_1^2 \frac{f(x)}{x} dx$ .

**Μονάδες 7**

**B4.** Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^3}$ .

**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνονται οι συναρτήσεις

$f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $f(x) = \frac{x}{x-1}$  και

$g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $g(x) = \ln x$ .

**Γ1.** Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις κατακόρυφες και οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$ .

**Μονάδες 6**

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = g(x)$  έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα  $(e, e^2)$ .

**Μονάδες 8**

**Γ3.** Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση  $\varphi = g \circ f$ .

**Μονάδες 6**

**Γ4.** Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση με τύπο  $h(x) = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$ . Αν  
 $\varphi(x) = \ln x - \ln(x-1)$ ,  $x \in (1, +\infty)$ ,

να εξετάσετε αν  $\varphi = h$ .

**Μονάδες 5**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν:

- Η  $f$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ .
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \eta\mu x}{x} = 0$ .
- $f'(x)f''(x) = x$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι  $f(0) = 0$  και  $f'(0) = 1$ .

**Μονάδες 8**

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι  $f'(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 6**

**Δ3.** Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή ή κοίλη και να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

**Μονάδες 6**

**Δ4.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι «1-1» (μονάδες 2) και στη συνέχεια να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f^{-1}$  (μονάδες 3).

**Μονάδες 5**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

- 1.** Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
- 2.** Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
- 3.** Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
- 4.** Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
- 5.** Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
- 6.** Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 17:00

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**