ΣΧΟΛΙΑΣΜΟΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

Τα θέματα απευθυνόντουσαν σε καλά προετοιμασμένους μαθητές, την πλήρη κατανόηση της θεωρίας και τη σωστή χρήση των θεωρημάτων.

Ο βαθμός δυσκολίας είναι αυξημένος και λόγω των πολλών ερωτημάτων που ήθελαν αιτιολόγηση και σκέψη.

ΤΣΙΜΙΣΚΗ & ΚΑΡΟΛΟΥ ΝΤΗΛ
ΓΩΝΙΑ
ΤΗΛ: 270727 – 222594
ΑΡΤΑΚΗΣ 12 – Κ. ΤΟΥΜΠΑ
ΤΗΛ: 919113 – 949422
www.syghrono.gr

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΤΡΙΤΗ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2023
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σχολικού βιβλίου - σελ. 111

Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου – σελ. 104

Α3. Θεωρία σχολικού βιβλίου – σελ. 128

Α4. α) Λ

β) Λ

γ) Λ

δ) Σ

ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $g(x)=\dfrac{4-e^{2x}}{e^x},\ D_g=\mathbb{R}$ και $h(x)=\ln x,\ \ x>0,\ \ D_h=(0,+\infty)$

$$D_f=D_{g\circ h}=\begin{cases}x\in D_h\\ h(x)\in D_g\end{cases}=\begin{cases}x>0\\ \ln x\in\mathbb{R},\ \text{που ισχύει}\end{cases}=(0,+\infty)$$

και τύπο $f(x)=(g\circ h)(x)=g(h(x))=\dfrac{4-e^{2\ln x}}{e^{\ln x}}=\dfrac{4-e^{\ln x^2}}{e^{\ln x}}=\dfrac{4-x^2}{x}$, x>0

B2. i) Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως ρητή στο $(0,+\infty)$ με

$$f'(x)=\left(\frac{4-x^2}{2}\right)'=-\frac{\left(x^2+4\right)}{x^2}<0$$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

ii) $\dfrac{4-\pi^2}{4-e^2}>\dfrac{\pi}{e}\overset{4-e^2<0}{\Leftrightarrow}\dfrac{4-\pi^2}{\pi}>\dfrac{4-e^2}{e}\Leftrightarrow f(\pi)>f(e)\overset{f:\searrow}{\Leftrightarrow}\pi>e,$ που ισχύει

B3. Αναζητούμε κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x_0=0$**:**

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left[\left(4-x^2\right)\cdot\frac{1}{x}\right]=4\cdot(+\infty)=+\infty$$

διότι: $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(4-x^2\right)=4$ και $\lim\limits_{x\to 0^+} x=0,\quad \alpha\lambda\lambda\acute{\alpha}\ x>0,$ άρα $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$

Επομένως η $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

ΠΛΑΓΙΑ ΑΣΥΜΠΤΩΤΗ ΣΤΟ $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{4-x^2}{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4-x^2}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{x^2}=-1=\lambda$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\lambda x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)+x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4-x^2}{x}+x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4\cancel{-x^2+x^2}}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(4\cdot\frac{1}{x}\right)=0=\beta$$

Επομένως η ευθεία $y=-x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

B4.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)}{f(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)}{\frac{4-x^2}{x}}$$

$$\left|\frac{\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)}{\frac{4-x^2}{x}}\right|=\frac{\left|\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)\right|}{\left|\frac{4-x^2}{x}\right|}\le\frac{1}{\left|\frac{4-x^2}{x}\right|}=\frac{1}{-\frac{4-x^2}{x}}=\frac{x}{x^2-4}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow-\frac{x}{x^2-4}\le\frac{\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)}{\frac{4-x^2}{x}}\le\frac{x}{x^2-4}\quad(1)$$

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2-4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0\\&\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{x}{x^2-4}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{x}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0\end{aligned}\right\}\overset{(1)}{\Rightarrow}\alpha\pi\acute{o}\ \text{το κριτήριο παρεμβολής}$$

προκύπτει ότι: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)}{f(x)}=0$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$$f(x)=\begin{cases} x^2-3x+3, & x<1 \\ \dfrac{1}{x}+\alpha, & x\geq 1 \end{cases}$$

$$\int_2^3 xf(x)\,dx=1 \Leftrightarrow \int_2^3 x\cdot\left(\frac{1}{x}+\alpha\right)dx=1 \Leftrightarrow \int_2^3 (x+\alpha\cdot x)\,dx=1 \Leftrightarrow$$, με $f(x)=\dfrac{1}{x}+\alpha, \quad x\geq 1$

$$\Leftrightarrow [x]_2^3+\left[\frac{a\cdot x^2}{2}\right]_2^3=1 \Leftrightarrow 3-2+\frac{a}{2}\left(3^2-2^2\right)=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{a}{2}(9-4)=1 \Leftrightarrow 1+\frac{5a}{2}=1 \Leftrightarrow a=0$$

Γ2. **i)** Για $\alpha=0$ από το Γ1. έχουμε:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-3x+3, & x<1 \\ \dfrac{1}{x}, & x\geq 1 \end{cases} \qquad \text{με } f(1)=1$$

Για να αποδείξουμε ότι ορίζεται η εφαπτομένη (ε) της C_f στο $x_0=1$, αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \quad \textbf{(2)}$$

$$\Gamma\iota\alpha\ x<1: \lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-3x+3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=-1$$

$$\Gamma\iota\alpha\ x>1: \lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1-x}{x}}{x-1}=-1$$

Άρα ισχύει η σχέση (2), επομένως υπάρχει η $f'(1)=-1$.

ii) Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f στο $x_0=1$ είναι η:

(ε): $y-f(1)=f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y-1=-(x-1) \Leftrightarrow y=-x+2$,

όπου $f'(1)=-1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega=-1 \overset{\varepsilon\varphi\omega<0}{\underset{\omega>90^\circ}{\Leftrightarrow}} \omega=\dfrac{3\pi}{4}$ ή 135°.

Γ3. Για $x\in(-\infty,1)$ η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με

$$f'(x)=2x-3$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x-3=0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$$

$$x<1 \Rightarrow 2x<2 \Rightarrow 2x-3<-1 \Rightarrow f'(x)<-1<0$$

άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,1)$.

Για $x\in(1,+\infty)$ η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως ρητή με

$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}<0$ για $x\in(1,+\infty)$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1,+\infty)$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 άρα και συνεχής στο 1, επομένως η f είναι γησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και ‘1-1’.

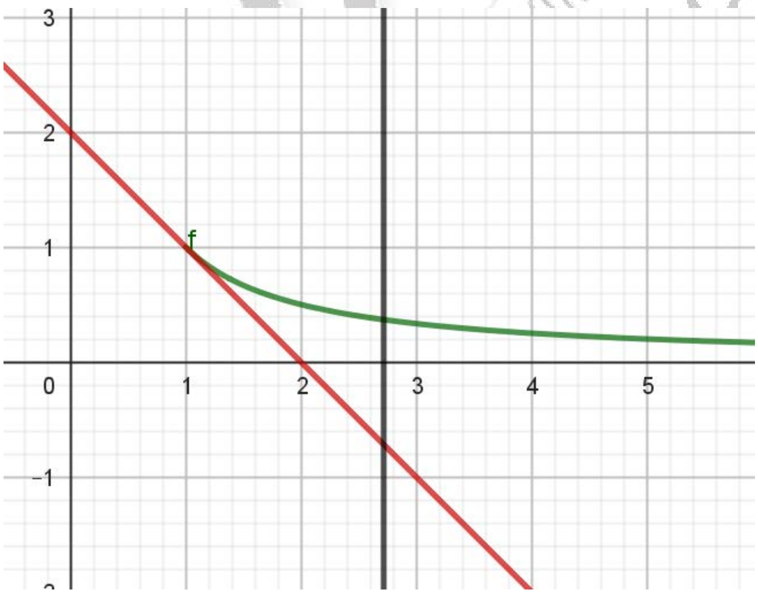
$$f\left((-\infty,1)\right)\underset{f\,\sigma\upsilon\nu}{\overset{f\searrow}{=}}\left(\lim_{x\to1^-}f(x),\lim_{x\to-\infty}f(x)\right]=(1,+\infty)$$

$$f\left([1,+\infty)\right)\underset{f\,\sigma\upsilon\nu}{\overset{f\searrow}{=}}\left(\lim_{x\to+\infty}f(x),f(1)\right]=(0,1]$$

$$f(\mathbb{R})=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)=(1,+\infty)\cup(0,1]=(0,+\infty)$$

Γ4. Είναι: $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}<0$ για $x\in(1,+\infty)$ και $f''(x)=\dfrac{2}{x^3}>0$, άρα η f είναι κυρτή στο $[1,+\infty)$, επομένως $f(x)\ge y_\varepsilon \Leftrightarrow f(x)\ge -x+2$, και η ισότητα ισχύει μόνο στο σημείο επαφής.

Η $f(x)=\dfrac{1}{x}$ είναι συνεχής ως ρητή και η $y_\varepsilon=-x+2$ συνεχής ως πολυωνυμική.



$$\mathrm{E}(\Omega)=\int_1^2\left|f(x)-y_\varepsilon\right|dx+\int_2^e f(x)\,dx=\int_1^2\left(\frac{1}{x}+x-2\right)dx+\int_2^e\frac{1}{x}dx=$$

$$=\left[\ln|x|+\frac{x^2}{2}-2x\right]_1^2+\left[\ln|x|\right]_2^e=\frac{1}{2}\tau.\mu.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f(x)=\ln(2-x)-\dfrac{1}{x}+\kappa,\ \kappa\in\mathbb{R}$ και $x\in(0,2)$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2x}{x-1}=l\in\mathbb{R}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)-2x}{x-1}$ (1) με $\lim\limits_{x\to 1}g(x)=l$

$(1)\Leftrightarrow f(x)-2x=(x-1)g(x)\Leftrightarrow f(x)=(x-1)g(x)+2x$

Άρα,

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\left[(x-1)g(x)+2x\right]=0\cdot l+2=2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 1}f(x)=2\Leftrightarrow \lim_{x\to 1}\left[\ln(2-x)-\frac{1}{x}+k\right]=2\Leftrightarrow \ln 1-1+k=2\Leftrightarrow k=3$$

Άρα, $f(x)=\ln(2-x)-\dfrac{1}{x}+3,\ \ x\in(0,2)$

Δ2. Για $x\in(0,2)$, η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

$$f'(x)=-\frac{1}{2-x}+\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x^2}=\frac{x^2+x-2}{x^2(x-2)}\quad \mu\varepsilon\quad x^2\cdot(x-2)<0,\ \text{για}\ x\in(0,2)$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow \frac{x^2+x-2}{x^2(x-2)}=0\Leftrightarrow x^2+x-2=0\Leftrightarrow x=-2(\alpha\pi o\rho)\quad \text{ή}\quad x=1(\delta\varepsilon\kappa\tau\acute{\eta})$$

x	0		1		2
f′(x)		+	0	−	
f(x)		↗		↘	

Άρα η συνάρτηση είναι:

- Γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,1]$
- Γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1,2)$
- Παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x_0=1$, το $f(1)=2$.

$$f((0,1])\underset{f\,\sigma\upsilon\nu}{\overset{f\nearrow}{=}}\left(\lim_{x\to 0^+}f(x),f(1)\right]=(-\infty,2]$$
$$f([1,2))\underset{f\,\sigma\upsilon\nu}{\overset{f\searrow}{=}}\left(\lim_{x\to 2^-}f(x),f(1)\right]=(-\infty,2]$$
$$f((0,2))=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)=(-\infty,2]\cup(-\infty,2]=(-\infty,2]$$

- $0 \in f(\Delta_1) = (-\infty, 2]$, και η f είναι συνεχής, άρα υπάρχει $x_1 \in (-\infty, 2)$ τέτοιο ώστε κι επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,1]$, άρα το x_1 είναι μοναδικό.
- $0 \in f(\Delta_2) = (-\infty, 2]$, και η f είναι συνεχής, άρα υπάρχει $x_2 \in (-\infty, 2)$ τέτοιο ώστε κι επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, 2)$, άρα το x_2 είναι μοναδικό.

Άρα υπάρχουν ακριβώς δύο x_1, x_2: $0 < x_1 < 1 < x_2 < 2$ τέτοια ώστε να είναι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$. Επιπλέον,

$$\left.\begin{aligned} & f\left(\frac{1}{3}\right) = \ln\frac{5}{3} - 3 + 3 = \ln\frac{5}{3} > 0 \\ & f(x_1) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f\left(\frac{1}{3}\right) > f(x_1) \overset{f \nearrow \sigma\tau o \left[x_1, \frac{1}{3}\right]}{\Rightarrow} x_1 < \frac{1}{3}$$

Δ3. Η f είναι συνεχής στο $\left[x_1, \frac{1}{3}\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(x_1, \frac{1}{3}\right)$, άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi \in \left(x_1, \frac{1}{3}\right) \subseteq (0,1)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f\left(\frac{1}{3}\right) - \cancel{f(x_1)}}{\frac{1}{3} - x_1} = \frac{f\left(\frac{1}{3}\right)}{\frac{1 - 3x_1}{3}} = \frac{3 \cdot f\left(\frac{1}{3}\right)}{1 - 3x_1}$$

Επομένως, η κλίση της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ είναι:

Επίσης, $f''(x) = -\frac{1}{(x-2)^2} - \frac{2}{x^3} < 0$, για $x \in (0, 2)$, άρα η f' είναι κοίλη στο (0,1), άρα το ξ είναι μοναδικό.

Δ4. Οι F , G παράγουσες της f $\Leftrightarrow F'(x) = G'(x) = f(x), x \in (0, 2)$. Άρα υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $F(x) = G(x) + c$.

- Για $x = x_1$: $\cancel{F(x_1)}^{0} = G(x_1) + c \Rightarrow c = -G(x_1)$
- Για $x = x_2$: $F(x_2) = \cancel{G(x_2)}^{0} + c \Rightarrow c = F(x_2)$

  άρα προκύπτει ότι $F(x_2) = -G(x_1) \Leftrightarrow F(x_2) + G(x_1) = 0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$H(x)=x_1F(x)+x_2G(x)-x_1+x_2+2x, \quad x\in[x_1,x_2]$$

- $H(x)$: συνεχής στο $[x_1,x_2]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων
- $H(x_1)\cdot H(x_2)<0$,

γιατί: $H(x_1)=x_1F(x_1)+x_2G(x_1)-x_1+x_2+2x_1=x_2G(x_1)+x_1+x_2<0$ και

$$H(x_2)=x_1F(x_2)+x_2G(x_2)-x_1+x_2+2x_2=x_1F(x_2)-x_1+x_2\overset{(*)}{=}-x_1G(x_1)-x_1+x_2>0$$

διότι: $G'(x)=f(x)>0\Rightarrow G(x)$ γνησίως αύξουσα στο $[x_1,x_2]$:

$x_1<x_2\overset{G\nearrow}{\Rightarrow}G(x_1)<G(x_2)=0$

άρα από Θεώρημα Bolzano, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(x_1,x_2)$, τέτοιο ώστε $H(\xi)=0$.

Όμως,

$$H'(x)=x_1F'(x)+x_2G'(x)+2=x_1f(x)+x_2f(x)+2=(x_1+x_2)f(x)+2>0, \quad x\in(x_1,x_2)$$

Άρα η $H(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο (x_1,x_2). Επομένως το ξ είναι μοναδικό.

Επιμέλεια: Αϊβαλιώτη Ελένη, Μαργαριτέλη Ελένη